Devoir sur Table 4

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

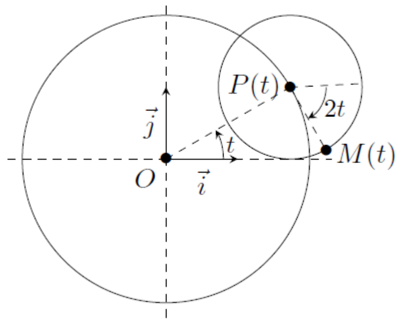
Problème 1 Modélisation d'un manège pour enfant.

(*Banque PT Maths B 2021*)

Le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. *Question préliminaire.* Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z.
   (a) Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ.
   (b) Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par l'homothétie h_a de centre O et de rapport a avec $a \neq 0$.
   (c) Vérifier que $r_\theta \circ h_a = h_a \circ r_\theta$. On note alors $f_{a,\theta} = r_\theta \circ h_a$.
2. *Formules de trigonométrie.* On considère 4 réels a, b, p et q.
   (a) Donner, sans démonstration, la linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ et $\sin(a)\sin(b)$.
   (b) En déduire que $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ainsi qu'une factorisation de
   $\sin(p) + \sin(q)$.
3. Un manège pour enfant est constitué d'une plateforme tournant autour d'un axe, lui même animé d'un mouvement circulaire.

Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et les mouvements des points $P(t)$ et $M(t)$ sont donnés par :
• L'affixe complexe du point $P(t)$ est $2e^{it}$,
• L'affixe complexe du vecteur $\overrightarrow{P(t)M(t)}$ est e^{-2it}.
On note $z(t)$ l'affixe complexe du point $M(t)$ et Γ la courbe décrite par l'ensemble des points $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.



(a) En calculant pour tout réel t l'affixe complexe $z(t)$ du point $M(t)$, démontrer qu'une représentation paramétrique de Γ est $\left\{\begin{array}{l} x(t)=2\cos(t)+\cos(2t) \\ y(t)=2\sin(t)-\sin(2t) \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$.

(b) Pour tout réel t, comparer les affixes complexes de $r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t))$ et de $M\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

En déduire que Γ est invariante par une rotation à préciser.

(c) Justifier soigneusement que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

On donnera à chaque étape les transformations à effectuer pour obtenir la courbe Γ en entier.

(d) Calculer $x'(t)$ pour $t\in\mathbb{R}$ et justifier les égalités :

$$x'(t)=-2\sin(t)(1+2\cos(t))=-4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

(e) Calculer $y'(t)$ pour $t\in\mathbb{R}$ et justifier les égalités :

$$y'(t)=2(1-\cos(t))(1+2\cos(t))=4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

(f) Dresser les tableaux de variation des fonctions x et y sur $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

On précisera les valeurs prises aux bornes de cet intervalle.

(g) Déterminer une équation de la tangente à Γ au point $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et vérifier qu'elle passe par le point A de coordonnées $(2,0)$.

(h) Déterminer la nature du point $M(0)$ et préciser la tangente à Γ en ce point.

(i) Tracer Γ ainsi que ses tangentes déterminées précédemment sur la feuille de papier millimétrée fournie. On utilisera des couleurs différentes pour les différentes étapes de la construction sans oublier la légende. On donne $\sqrt{3}\approx 1,73$.

Unité : 3 cm.

Problème 2

(*CCP PC 2013*)

L'objectif du problème est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent un **vecteur propre commun** *Les parties I et III traitent chacune de cas particuliers en dimension 3 et n. Elles sont indépendantes l'une de l'autre. La partie II aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun.*

Pour $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, on note $E_\lambda(M)=\mathrm{Ker}(M-\lambda I_n)$ et $\mathrm{Im}_\lambda(M)=\mathrm{Im}(M-\lambda I_n)$.

Pour $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on définit $[A,B]\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule :

$$[A,B]=AB-BA.$$

Pour $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$ on définit l'endomorphisme $[f,g]$ de E par la formule :

$$[f,g]=f\circ g-g\circ f.$$

Partie I — Étude dans un cas particulier

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&-3&-1\\0&2&0\\1&-3&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-5&3&-1\\-2&6&2\\-5&3&-1\end{pmatrix}\text{ et }D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&6&0\\0&0&-6\end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ où $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer le spectre de A.
   (b) Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
   (c) A est-elle diagonalisable ?
   (d) Montrer qu'aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B.
2. (a) Déterminer le spectre de B.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_4)$ et que $\dim(E_2(B)) = 2$.
   (c) B est-elle diagonalisable ?
3. (a) Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_5)$.
   (b) Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B.
4. (a) Vérifier que $[A, B] = C$.
   (b) Montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C.

Partie II — Conditions nécessaires et conditions suffisantes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

1. Dans cette question, on suppose que $\mathbf{e}$ est un vecteur propre commun à A et B.
   (a) Montrer que $\mathbf{e} \in \mathrm{Ker}([A, B])$.
   (b) Vérifier que $\mathrm{Rang}([A, B]) < n$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On dit que A et B vérifient la **propriété** $\mathcal{H}$ s'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A, B]).$$

2. Montrer que si $[A, B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.
3. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.
   (a) Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.
   (b) En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ la propriété suivante :

   $\mathcal{P}_k$: *Pour tout* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* E *de dimension* k *et pour tout couple d'endomorphismes* (φ, ψ) *de* E *tels que* $\mathrm{Rang}([\varphi, \psi]) \leqslant 1$, *il existe un vecteur propre commun à* φ *et* ψ.
4. Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.
5. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_k$ **est vérifiée pour tout entier** $k \in [\![1, n-1]\!]$ et que A et B **ne vérifient pas la propriété** $\mathcal{H}$.
   On note $C = [A, B]$, on suppose que $\mathrm{Rang}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.
   (a) Justifier l'existence de $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.
   (b) Vérifier que $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ où $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$.
   (d) Établir les inégalités suivantes : $1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leqslant n - 1$.

   Pour tout $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.
   (e) Montrer que $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$ et $[B, A - \lambda I_n] = -C$.
   En déduire que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

(f) Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ ; en déduire qu'il en est de même pour A et B.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Partie III — Étude d'un autre cas particulier

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour $P \in E$, on désigne par P' le polynôme dérivé de P.

Pour tout polynôme P de E, on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^{2n} P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

1. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Montrer que $g(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.
2. Montrer que f et g définissent des endomorphismes de E.
3. (a) Vérifier que si P est un vecteur propre de g, alors $\deg(P) \geqslant n$.
   (b) Montrer que X^n est un vecteur propre de g.

   Soit $i \in [\![1, 2n]\!]$. f^i correspond à la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ où f est prise i fois.

4. (a) Vérifier que $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Sp}(f^i) = \{0\}$.
5. Montrer que f^i et g possèdent un vecteur propre commun si et seulement si $i \geqslant n+1$.

   $\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de E définie par : $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^{2n})$.
   On note A_n la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_c$ et B_n celle de g dans la même base.

6. Déterminer A_n et B_n.
7. Dans cette question, on suppose que $n = 1$.
   (a) Montrer que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire l'expression de $(A_1)^2$ et $(A_1)^3$.
   (b) Déterminer le rang de $[(A_1)^i, B_1]$ pour $i = 1$ et $i = 2$.
   (c) En déduire que la condition nécessaire de la question II.1.b n'est pas suffisante et que la condition suffisante de la question II.6 n'est pas nécessaire.

Corrigé

Corrigé du problème 1

1. *Question préliminaire.* Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z.
   (a) Soit z' l'affixe de M', image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ.
   On a $\boxed{z' = e^{i\theta} z}$
   (b) Soit z' l'affixe de M', image de M par l'homothétie h_a de centre O et de rapport a avec $a \neq 0$.
   On a $\boxed{z' = az}$
   (c) Soit M un point du plan d'affixe z. L'affixe de son image par $r_\theta \circ h_a$ est $e^{i\theta}(az) = ae^{i\theta} z = a(e^{i\theta})$, qui est l'affixe de l'image de M par $h_a \circ r_\theta$.
   Ainsi, pour tout point M du plan, $r_\theta \circ h_a(M) = h_a \circ r_\theta(M)$
   Finalement, $\boxed{r_\theta \circ h_a = h_a \circ r_\theta}$.
2. *Formules de trigonométrie.* On considère 4 réels a, b, p et q.
   (a) On a

$$\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))}$$

$$\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))}$$

$$\boxed{\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))}$$

   (b) Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Posons $\left\{ \begin{array}{l} a-b=p \\ a+b=q \end{array} \right.$ on a donc $\left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{p+q}{2} \\ b = \dfrac{q-p}{2} \end{array} \right.$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos(p) - \cos(q) &= \cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{q-p}{2}\right) - \cos\left(\frac{p+q}{2} + \frac{q-p}{2}\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p}{2}\right) \\
&= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

   De même,

$$\begin{aligned}
\sin(p) + \sin(q) &= \sin\left(\frac{p+q}{2} - \frac{q-p}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2} + \frac{q-p}{2}\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{q-p}{2}\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, \qquad \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

3. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit z_P l'affixe de $P(t)$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{P(t)M(t)}$ est $z(t) - z_P = e^{-2it}$.
   On en déduit que $z(t) = z_P + e^{-2it} = 2e^{it} + e^{-2it}$.
   $x(t)$ et $y(t)$ étant respectivement les parties réelle et imaginaire de $z(t)$, on obtient :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{array} \right.}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Notons $z_1(t)$ l'affixe de $r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t))$
On a

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{i\frac{2\pi}{3}} z(t) \\ &= 2e^{i(\frac{2\pi}{3}+t)} + e^{-2it+i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 2e^{i(\frac{2\pi}{3}+t)} + e^{-2it-i\frac{4\pi}{3}} \\ &= 2e^{i(\frac{2\pi}{3}+t)} + e^{-2i(t+\frac{2\pi}{3})} \\ &= z\left(t+\frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel t, $\boxed{\text{les affixes complexes de } r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t)) \text{ et de } M\left(t+\frac{2\pi}{3}\right) \text{ sont égales}}$ et $M\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)$ est l'image de $M(t)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On en déduit que $\boxed{\Gamma \text{ est invariante par la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{2\pi}{3} \text{ dans le sens direct.}}$

(c) Les fonctions x et y sont 2π-périodiques, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On limite donc notre étude sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[0, 2\pi]$ ou bien (et c'est plus pertinent ici) $\left[\frac{-\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

Le point de paramètre $t + \frac{2\pi}{3}$ est l'image du point de paramètre t par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, donc on peut étudier la courbe sur un intervalle d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$: $\left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. On obtiendra le support de la courbe sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}\right]$ par une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ puis le support de la courbe sur $\left[\frac{3\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ par une nouvelle rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

x est paire, y est impaire, on va donc limiter notre étude à $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et on obtiendra le support de la courbe sur $\left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ par symétrie d'axe (Ox).

Finalement, $\boxed{\text{on limite notre étude à } \left[0, \frac{\pi}{3}\right]}$.

On obtient le support complet par $\boxed{\text{une rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{2\pi}{3}}$, $\boxed{\text{une rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{4\pi}{3}}$ et $\boxed{\text{une symétrie par rapport à l'axe } (Ox).}$

(d) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $x'(t) = -2\sin(t) - 2\sin(2t)$, d'où par la factorisation obtenue en 2.(b).

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t) = -2(\sin(t) + \sin(2t)) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

De plus, comme pour $t \in \mathbb{R}$, $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, on a également

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t) = -2(\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t)) = -2\sin(t)(1 + 2\cos(t))$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t) = -2\sin(t)(1 + 2\cos(t)) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

(e) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $y'(t) = 2(\cos t - \cos(2t))$
D'où, d'après les formules vus plus haut,

$$\boxed{y'(t) = 2(\cos t - \cos(2t)) = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)}$$

On a également $y'(t) = 2(\cos t - \cos(2t)) = 2(\cos(t) - 2\cos^2(t) + 1)$
1 et $-\dfrac{1}{2}$ sont racines du polynôme $-2X^2 + X + 1$, on a donc

$$-2X^2 + X + 1 = -2(X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right) = -(X-1)(2X+1) = (1-X)(2X+1)$$

D'où, $y'(t) = 2(1-\cos(t))(1+2\cos(t))$.
Ainsi pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{y'(t) = 2(1-\cos(t))(1+2\cos(t)) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

(f) Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, on a

$$x'(t) = -2\sin(t)(1+2\cos(t)) \leqslant 0$$
$$y'(t) = 2(1-\cos(t))(1+2\cos(t)) \geqslant 0$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

t	0		$\frac{\pi}{3}$
$x'(t)$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$
x	3	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$y'(t)$	0	$+$	2

(g) Soit (T) la tangente à Γ au point $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.
$M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ est un point régulier de Γ, (T) est donc dirigée par le vecteur dérivée première de coordonnées

$$\begin{pmatrix} x'\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $N(x,y) \in (T)$ si et seulement si $\overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{3}\right)N}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc si et seulement $\det\left(\overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{3}\right)N}, \overrightarrow{u}\right) = 0$

Or

$$\det\left(\overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{3}\right)N}, \overrightarrow{u}\right) = \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \\ y - \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix} = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ainsi $N(x,y) \in (T) \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y = 2$.

$\boxed{\text{Une équation de la tangente à } \Gamma \text{ au point } M\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ est donc } x + \sqrt{3}y = 2.}$

On a $2 + \sqrt{3} \times 0 = 2$, $\boxed{\text{cette tangente passe bien par le point } A \text{ de coordonnées } (2,0).}$

Tangente
Vous savez donc que (T) est la droite $\left(AM\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ ce qui va vous aider à la tracer.

(h) On a $x'(0) = y'(0) = 0$. Le point $M(0)$ est un point singulier.
De plus, on a

$$x(t) \underset{t\to 0}{=} 2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right) + 1 - 2t^2 + o(t^3) \underset{t\to 0}{=} 3 - 3t^2 + o(t^3)$$

$$y(t) \underset{t\to 0}{=} 2t - \frac{t^3}{3} - 2t + 4\frac{t^3}{3} + o(t^3) \underset{t\to 0}{=} t^3 + o(t^3)$$

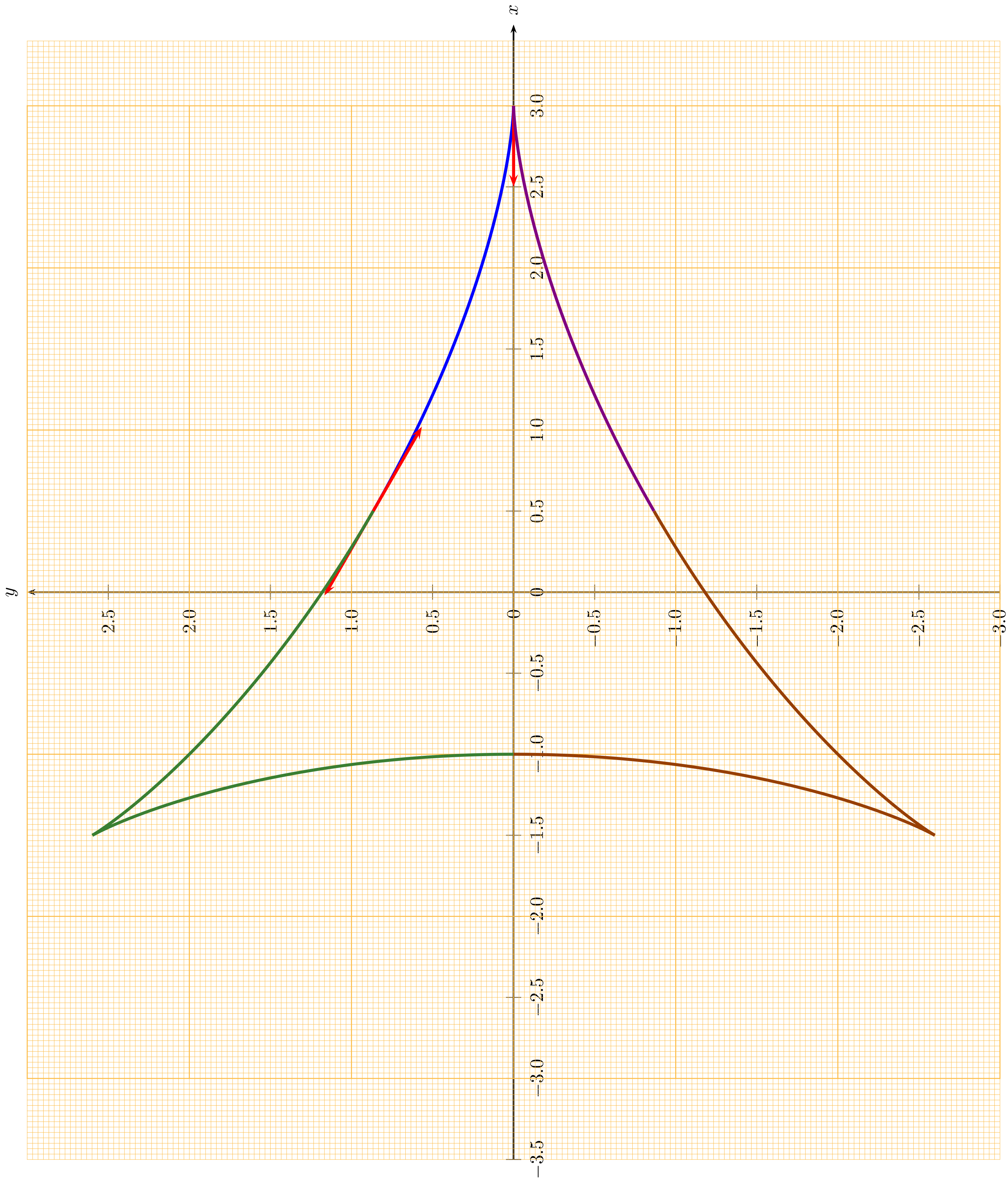
Ainsi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t\to 0}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + o(t^3)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$ est libre . $\boxed{\text{Le point } M(0) \text{ est donc un point de rebroussement de première espèce}}$, la tangente est dirigée par le vecteur dérivée seconde de coordonnées $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, elle est donc horizontale et passe par $M(0)$.

$\boxed{\text{La tangente à } \Gamma \text{ en } M(0) \text{ est donc l'axe des abscisses.}}$

(i) Tracé de Γ :
En bleu, tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ avec, en rouge, les tangentes en $M(0)$ et $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, en violet, l'image de cette courbe par symétrie d'axe (Ox) ce qui complète la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$, en vert l'image de la réunion des deux précédentes par rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et en brun l'image de la réunion des courbes en bleu et en violet par rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$.


x
y
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−3.5

Corrigé du problème 2

Partie I — Étude dans un cas particulier

1. (a) On calcule le polynôme caractéristique de A, $\chi_A(X) = (X+2)(X-1)^2$. Par conséquent $\boxed{\text{le spectre de } A \text{ est } \{-2;1\}.}$

(b) On a $Au_1 = u_1$, $Au_2 = u_2$. Comme u_1, u_2 ne sont pas colinéaires alors (u_1, u_2) est une famille libre de deux vecteurs dans $E_1(A)$. Cet espace propre est de dimension inférieure à la multiplicité de 1 dans χ_A, i.e. inférieure à 2. Comme il contient une famille libre de cardinal 2 il est de dimension supérieure ou égale à 2. Finalement $\dim(E_1(A)) = 2$ et (u_1, u_2) est une base de $E_1(A)$.
$Au_3 = -2u_3$ et u_3 n'est pas nul donc (u_3) est une base de $E_{-2}(A)$.
Les sous espaces propres d'une matrice sont en somme directe donc (u_1, u_2, u_3) est une famille libre. Elle est de cardinal 3, égal à la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Ainsi $\boxed{\text{la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ constituée de vecteurs propres de } A.}$

Remarque

On peut aussi démontrer que (u_1, u_2, u_3) est une base (par exemple en calculant le déterminant de cette famille dans la base canonique) puis que chacun de ces vecteurs est propre pour A.

(c) On vient de trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$.

Diagonalisabilité

On aurait aussi pu remarquer que A est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable

(d) On a

$$Bu_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}(e_1)$$

$$Bu_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}(e_2)$$

$$Bu_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}(e_3)$$

Aucun élément de $\mathcal{F}$ n'est vecteur propre de B donc
$\boxed{\text{Aucun élément de } \mathcal{F} \text{ n'est vecteur propre commun à } A \text{ et } B.}$

2. (a) On a $\chi_B = (X-2)^3$ donc $\boxed{\text{le spectre de } B \text{ est } \{2\}.}$

(b) On a

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

.
Les trois colonnes de cette matrice sont colinéaires à u_4 donc $\mathrm{Im}_2(B) \subset \mathrm{Vect}(u_4)$. Comme u_4 est la première colonne de $b - 2I_3$ on a $\mathrm{Vect}(u_4) \subset \mathrm{Im}_2(B)$. Par conséquent $\boxed{\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(u_4).}$

Le théorème du rang nous assure alors que $\boxed{\dim E_2(B) = 2.}$

(c) La somme des dimensions des sous espaces propres de B est égale à $2 < 3$ donc $\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Une seule valeur propre

On a en fait vu en cours qu'une matrice n'admettant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si elle est égale à λI, ce qui n'est pas le cas ici.

3. (a) On a $Bu_5 = 2u_5$ et $Au_5 = u_5$ ainsi $\mathrm{Vect}(u_5) \subset E_1(A) \cap E_2(B)$.
$E_1(A)$ et $E_2(B)$ sont de dimension 2 donc $E_1(A) \cap E_2(B)$ est de dimension 1 ou 2 (on a déjà un vecteur non nul dans l'intersection).
Si elle est de dimension 2, alors $E_1(A) = E_2(B)$ ce qui est absurde car $u_1 \in E_1(A)$ mais $u_1 \notin E_2(B)$. Par conséquent l'intersection est de dimension 1 et donc, par égalité des dimensions on a $\boxed{E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(u_5).}$

(b) Comme u_3 n'est pas vecteur propre de B et qu'il engendre $E_{-2}(A)$, il n'y a pas de vecteur propre commun à A et B dans $E_{-2}(A)$.
De plus 2 est la seule valeur propre de B donc les vecteurs propres communs à A et B sont dans $E_1(A) \cap E_2(B)$.

D'après la question précédente, $\boxed{\text{les vecteurs propres communs à } A \text{ et } B \text{ sont les vecteurs de la forme } \lambda u_5,\ \lambda \in \mathbb{R}^*.}$

4. (a) On a
$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
Ainsi $\boxed{[A,B] = C.}$

(b) On calcule le polynôme caractéristique de C.
$$\begin{aligned}
\chi_C &= \begin{vmatrix} X+5 & -3 & 1 \\ 2 & X-6 & -2 \\ 5 & -3 & X+1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X & 0 & -X \\ 2 & X-6 & -2 \\ 5 & -3 & X+1 \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\
&= X \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & X-6 & -2 \\ 5 & -3 & X+1 \end{vmatrix} \\
&= X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & X-6 & 0 \\ 5 & -3 & X+6 \end{vmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\
&= X(X-6)(X+6)
\end{aligned}$$

χ_C est scindé à racines simples donc C est diagonalisable. De plus les valeurs propres de C sont -6, 0 et 6 donc $\boxed{C \text{ est semblable à } D.}$

Les rangs de C et de D sont alors égaux et ainsi $\boxed{\text{Rang}(C) = 2.}$

Partie II — Conditions nécessaire et conditions suffisantes

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$.
Alors $ABe = \mu Ae = \lambda\mu e$ et de même $BAe = \lambda\mu e$.
Ainsi $\boxed{e \in \text{Ker}([A,B]).}$

(b) e est non nul (car c'est vecteur propre de A) donc $\dim(\text{Ker}([A,B])) \geqslant 1$ et donc, d'après le théorème du rang $\text{Rang}([A,B]) = n - \dim(\text{Ker}([A,B])) \leqslant n-1$.
On a donc bien $\boxed{\text{Rang}([A,B]) < n.}$

2. On suppose $[A,B] = 0_n$. Comme $K = \mathbb{C}$, A admet au moins une valeur propre. Soit alors $\lambda \in Sp(A)$.
On a $[A,B] = 0_n$ donc $\text{Ker}([A,B]) = \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et on a bien $E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A,B])$ Ainsi $\boxed{A \text{ et } B \text{ vérifient la propriété } \mathcal{H}.}$

> **Existence d'une valeur propre**
> D'après le théorème de D'Alembert Gauss tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$. En particulier χ_A admet au moins une racine complexe, en d'autres termes A admet au moins une valeur propre.

3. (a) Soit $X \in E_\lambda(A)$. D'après $\mathcal{H}$ on a $(AB - BA)X = 0$, c'est-à-dire $ABX = BAX$.
Or $AX = \lambda X$ donc $A(BX) = \lambda BX$. Ceci signifie que $BX \in E_\lambda(A)$.
L'application $\psi : X \mapsto BX$ est alors un application de $E_\lambda(A)$ dans lui même. De plus, par propriété du produit matriciel, ψ est linéaire. Ainsi $\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } E_\lambda(A).}$

(b) λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ est de dimension non nulle. Comme $K = \mathbb{C}$, ψ est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension non-nulle, il admet donc au moins une valeur propre
Il existe donc $\mu \in \mathbb{C}$ et $Y \in E_\lambda(A)$ non nul tels que $\psi(Y) = \mu Y$. On a donc $BY = \mu Y$. Or $Y \in E_\lambda(A)$, d'où $AY = \lambda Y$ et Y non nul.
$\boxed{Y \text{ est ainsi un vecteur propre commun à } A \text{ et } B.}$

4. En dimension 1 on assimile les matrices aux réels, tous les vecteurs non nuls sont alors des vecteurs propres donc $\boxed{\mathcal{P}_1 \text{ est vérifiée.}}$

5. (a) A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$ donc $E_\lambda(A)$ n'est pas inclus dans $\text{Ker}(C)$. Il existe ainsi $u \in E_\lambda(A)$ tel que $u \notin \text{Ker}(C)$,
$\boxed{u \text{ est donc un élément de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ qui vérifie } Au = \lambda u \text{ et } Cu \neq 0.}$

(b) Par hypothèse $\mathrm{Im}(C)$ est de dimension 1 et $v = Cu$ est un vecteur non nul de cette image donc $\boxed{\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(v).}$

(c) On a $v = Cu$ donc
$$v = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu$$
Ainsi $v = (A - \lambda I)(Bu)$, on a donc $v \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. Puisque $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(v)$ on a donc bien $\boxed{\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A).}$

(d) $\mathrm{Im}(C)$ est de dimension 1 donc $1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A))$.
On sait que λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ a une dimension supérieure ou égale à 1.
D'après le théorème du rang, on a $\dim(E_\lambda(A)) + \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) = n$, d'où $\dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) = n - \dim(E_\lambda(A)) \leqslant n - 1$.
Finalement
$$\boxed{1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leqslant n - 1}$$
.

(e) On a
$$[A, A - \lambda I_n] = A(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)A = A^2 - \lambda A - A^2 + \lambda A = 0_n$$
Ainsi $\boxed{[A, A - \lambda I_n] = 0_n.}$
On a également
$$[B, A-\lambda I_n] = B(A-\lambda I_n) - (A-\lambda I_n)B = BA - \lambda B - AB + \lambda B = BA - AB = -[A, B] = -C$$
D'où $\boxed{[B, A - \lambda I_n] = -C.}$
φ et ψ sont des applications linéaires par propriétés du produit matriciel.
Soit $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, il existe donc $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X = (A - \lambda I_n)Y$
Comme $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$, on a
$$AX = A(A - \lambda I_n)Y = (A - \lambda I_n)(AY) \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$$
Ainsi, pour tout $X \in Im_\lambda(A)$, $AX \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. Par conséquent $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathrm{Im}_\lambda(A).}$
De même
$$BX = B(A - \lambda I_n)Y = (A - \lambda I_n)(BY) - CY$$
Or $CY \in \mathrm{Im}(C)$ et $\mathrm{Im}\, C \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$ donc $CY \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. On a clairement $(A - \lambda I_n)(BY) \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$ donc $BX \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$.
On en conclut que $\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } \mathrm{Im}_\lambda(A).}$

(f) On a $\mathrm{Im}([\varphi, \psi]) \subset \mathrm{Im}(C)$ donc $\mathrm{Rang}([\varphi, \psi]) \leqslant 1$ et $\dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \in [\![1, n-1]\!]$.
On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à φ et ψ.
On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ et } \psi \text{ ont un vecteur propre commun.}}$
Il existe donc $Z \in \mathcal{M})_{n,1}(\mathbb{C})$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\varphi(Z) = \alpha Z$ et $\psi(Z) = \beta Z$, c'est-à-dire $AZ = \alpha Z$ et $BZ = \alpha Z$.
Ainsi $\boxed{A \text{ et } B \text{ ont un vecteur propre commun.}}$

6. On va procéder par récurrence forte sur $n \geqslant 1$.
<u>Initialisation :</u>
On a vu à la question 5. que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
<u>Hérédité :</u>
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vérifiée pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n et oit φ et ψ deux endomorphismes de E tels que $\mathrm{Rang}([\varphi, \psi]) \leqslant 1$.
On considère A et B les matrices associées respectivement à φ et ψ dans une base de E et on pose $C = AB - BA$.
— Si $\mathrm{Rang}(C) = 1$ et si A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$, alors, d'après la question 5., A et B ont un vecteur propre commun : φ et ψ ont un vecteur propre commun ($K = \mathbb{C}$ donc A a au moins une valeur propre.

— Si $\text{Rang}(C) = 1$ et A, B vérifient $\mathcal{H}$, alors d'après la question 3., φ et ψ ont un vecteur propre commun.
— Si $\text{Rang}(C) = 0$, alors $[A, B] = 0$ et, d'après les questions 2. et 3., φ et ψ ont un vecteur propre commun.

On en déduit que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée.

Par récurrence, on peut conclure que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n \text{ est vraie.}}$

Partie III — Étude d'un autre cas particulier

1. On a $g(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k}$. On pose le renversement d'indice $l = 2n - k$ ce qui nous donne $\boxed{g(P) = \displaystyle\sum_{l=0}^{2n} a_{2n-l} X^l.}$
2. Pour tout polynôme P, $\deg P' \leqslant \deg P$ et la dérivation des polynômes est linéaire donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$
   La question précédente prouve que g est une application de E dans E. Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors
   $$\begin{aligned} g(P + \lambda Q) &= X^{2n}(P + \lambda Q)\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right) + X^{2n} Q\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= g(P) + \lambda g(Q) \end{aligned}$$
   donc g est linéaire. $\boxed{g \text{ est donc un endomorphisme de } E.}$
3. (a) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un vecteur propre de g et λ la valeur propre associée, on a donc $g(P) = \lambda P$.
   La question 1.. prouve que g est injective donc λ ne peut pas être nul. Par conséquent P et $g(P)$ ont le même degré que l'on appelle d. (P n'est pas nul car vecteur propre).
   On a $a_d \neq 0$ donc si $k = 2n - d$, $a_{2n-k} \neq 0$ et donc $\deg(g(P)) \geqslant 2n - d$. Par conséquent $d \geqslant 2n - d$ et ainsi $\boxed{\deg(P) \geqslant n.}$
   (b) On a $g(X^n) = X^n$ et X^n n'est pas le polynôme nul donc $\boxed{X^n \text{ est un vecteur propre de } g.}$
4. (a) On a, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $f^i(P) = P^{(i)}$.
   Si $P \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$ alors $P^{(i)}$ et donc $P \in \text{Ker}(f^i)$.
   De plus, on sait que
   $$\text{Im}(f^i) = \text{Vect}(f^i(1), f^i(X) \cdot, f^i(X^n)) = \text{Vect}\left(\frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}\ ,\ k \in [\![i, n]\!]\right) = \mathbb{R}_{n-i}[X]$$
   Ainsi, d'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(f^i)) = n + 1 - (n - i + 1) = i$.
   Par inclusion et égalité des dimensions on a bien $\boxed{\text{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]}$.
   (b) Si P est non nul de degré $i - 1$, alors $f^i(P) = 0P$ donc $O \in Sp(f^i)$.
   Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ non-nul et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f^i(P) = \lambda P$.
   Notons d le degré de P, on a alors $d \geqslant i$ et ainsi $f^i(P)$ est de degré $d - i$.
   Or $f^i(P) = \lambda P$ et donc, si $\lambda \neq 0$, $f^i(P)$ et P sont de même degré, ce qui est absurde.
   Finalement $\boxed{\text{Sp}(f^i) = \{0\}.}$
5. Si $i \geqslant n + 1$, alors $f^i(X^n) = 0X^n$ donc X^n est vecteur propre de f^i. X^n est alors un vecteur propre commun à f et g.
   On suppose réciproquement que i est tel que f et g ont un vecteur propre commun.
   Soit P un vecteur propre commun. D'après la question 3.(a), $\deg(P) \geqslant n$ et d'après la question 4.(b). $P \in \text{Ker}(f^i)$ donc d'après la question 4.(a). $\deg(P) \leqslant i - 1$. Ainsi, $n \leqslant i - 1$ i.e. $i \geqslant n + 1$.
   Finalement $\boxed{f \text{ et } g \text{ ont un vecteur propre commun si et seulement si } i \geqslant n + 1.}$

6. On a $A_n = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2n+1}$ où pour i entre 2 et $2n$, $a_{i,i-1} = i-1$ et tous les autres coefficients nuls :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour k entre 0 et $2n$, $g(X^k) = X^{2n-k}$ donc $B_n = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2n+1}$ où pour tout i entre 1 et $2n+1$, $b_{i,2n+2-i} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls.

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

7. (a) En prenant $n = 1$ dans la question précédente, on obtient bien

$$\boxed{A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Par produit matriciel,

$$\boxed{(A_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (A_1)^3 = 0_3}$$

(b) On trouve $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. $\boxed{[A_1, B_1] \text{ est donc de rang 2.}}$

$[(A_1)^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $\boxed{[(A_1)^2, B_1] \text{ est donc de rang 2.}}$

(c) Quand $i = 2$, $i \geqslant 1 + 1$ donc, d'après la question 5., $(A_1)^2$ et B_1 ont un vecteur propre commun alors que la condition de la question $II.6.$ n'est pas vérifiée.

$\boxed{\text{La condition de la question } II.6. \text{ n'est donc pas nécessaire.}}$

Quand $i = 1$, $\text{Rang}([A_1, B_1]) < 3$ mais, toujours d'après la question 5., A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun.

$\boxed{\text{La condition de la question } II.1.(b) \text{ n'est donc pas suffisante.}}$